XVI Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задача 1

Буквы фрагмента известного стихотворения Ф.И. Тютчева заменены некоторыми буквами так, что разным буквам соответствуют разные буквы, а одинаковым — одинаковые. Пробелы между словами и знаки препинания сохранены.

Гьюь Фюббшн эй яюэовл,
Пфзшэюь юришь эй шчьйфшвл:
Г эйщ юбюрйээпо бвпвл —
С Фюббшн ьюцэю вюылъю сйфшвл.

Восстановите этот фрагмент.

Задача 2

Криптоша изобрел устройство, которое позволяет вычислить среднее арифметическое любых **9** чисел или любых **223** чисел. Как правильно использовать это устройство, чтобы найти среднее арифметическое любых **2006** чисел. При необходимости Криптоша может дополнительно провести одно деление и одно умножение.

Задача 3

Для зашифрования сообщения на английском языке составляются две таблицы размера **5x5.** В клетки каждой таблицы в некотором порядке записаны буквы укороченного английского алфавита (в котором буквы *v* и *w* отождествлены), так, что каждая буква встречается в каждой таблице ровно один раз. Букву, расположенную в $\boldsymbol{i}$-ой строке и $\boldsymbol{j}$-м столбце в первой таблице обозначим через $\boldsymbol{a_{ij}}$, а во второй таблице — через $\boldsymbol{b_{ij}}$. При зашифровании сообщение разбивается на пары подряд идущих букв, и каждая пара заменяется другой парой следующим образом. Первая буква пары ищется в первой таблице, а вторая буква — во второй таблице. Если пара имеет вид $\boldsymbol{a_{ij}b_{lm}}$,то при $\boldsymbol{i \neq l}$ она заменяется парой $\boldsymbol{b_{im}a_{lj}}$, а при $\boldsymbol{i = l}$ — парой $\boldsymbol{b_{lj}a_{im}}$. В результате зашифрования указанным способом сообщения

c r y p t o g r a p h i c a l g o r i t h m

был получен один из следующих шифртекстов:

p a b d g l i u r c a v t h o t u e a d s p,

d s z q u p h s b q i j d b m h p s j u i n.

Определите, какой именно? Ответ обоснуйте.

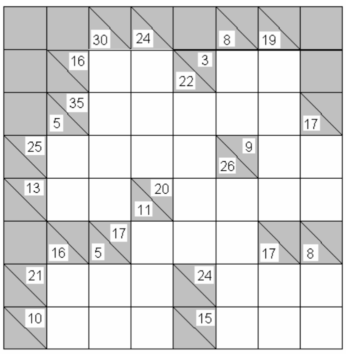
Задача 4

Пусть $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \ldots}$ и $\boldsymbol{b_1, b_2, b_3, \ldots}$ числовые последовательности периодов **16** и **2006** соответственно. Найдите период последовательности $\boldsymbol{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots}$. (Периодом последовательности $\boldsymbol{x_1, x_2}, x_3, \boldsymbol{\ldots}$ называется наименьшее натуральное число $\boldsymbol{T}$, такое, что для всех натуральных $\boldsymbol{n}$ верно равенство $\boldsymbol{x_{n+T} = x_n}$).

Задача 5

Бильярдные шары плотно уложены в правильный треугольник с основанием из 2006 шаров. На каждом шаре написано число. Сумма трех чисел, написанных на шарах при вершинах исходного треугольника, а также любых треугольников со сторонами, параллельными исходному треугольнику, равна 0. Какие числа могут быть написаны на шарах?

Задача 6



Заполните неокрашенные клетки таблицы числами от **1** до **9**. При этом сумма цифр в каждой неокрашенной горизонтали должна совпадать с числом, указанным слева, а в вертикали ни одна цифра не должна повторяться.